

Einführung in die Logik – 3d

Aussagenlogische Syntax und Semantik: Vollständigkeit und Korrektheit

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Semantische Eigenschaften von Ausdrücken der AL

- Ein wfA A der AL ist **allgemeingültig** (tautologisch; $\models A$) gdw. sich für alle Wahrheitswertzuweisungen zu den atomaren Bestandteilen des wfA der Wahrheitswert 1 ergibt.
- Ein wfA der AL ist **erfüllbar** (kontingent) gdw. sich für mindestens eine Wahrheitswertzuweisung zu den atomaren Bestandteilen des wfA der Wahrheitswert 1 ergibt.
- Ein wfA der AL ist **unerfüllbar** (kontradiktorisch, widersprüchlich) gdw. sich für keine Wahrheitswertzuweisung zu den atomaren Bestandteilen des wfA der Wahrheitswert 1 ergibt.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Semantische Beziehungen zwischen Ausdrücken der AL

- Ein wfA **B folgt** aus einem wfA **A** ($A \Vdash B$) gdw. wenn in allen Fällen, in denen A den W-Wert 1 hat, auch B den W-Wert 1 hat (Logische Folgerung, Implikation).
- Zwei wfAs A und B sind logisch **äquivalent** gdw. sie in allen Wahrheitswertzuweisungen dieselben Wahrheitswerte haben.
 - Logisch äquivalente wfAs können beliebig füreinander eingesetzt werden (*substitutio salva veritate*)
 - Wahrheitswertzuweisung zu atomaren wfAs: Interpretation, Modell, Zustandsbeschreibung (State of Affairs)
 - ← Vertiefung in Semantik der Prädikatenlogik

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vollständigkeit und Korrektheit (Widerspruchsfreiheit) der Aussagenlogik

Syntax

Ableitbarkeit

Beweisbarkeit (Theorem)

Semantik

Folgerung

Allgemeingültigkeit (Tautologie)

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Vollständigkeit und Korrektheit (Widerspruchsfreiheit) der Aussagenlogik

Korrektheit (a.: Widerspruchsfreiheit):

Wenn $\alpha \vdash A$, dann $\alpha \models A$

- Wenn A aus einer Formelmenge α syntaktisch ableitbar ist, dann folgt A auch semantisch aus α
- Wenn A syntaktisch beweisbar ist, dann ist A auch semantisch allgemeingültig
 - ▶ Jedes Theorem ist ein Tautologie.

Vollständigkeit:

Wenn $\alpha \models A$, dann $\alpha \vdash A$

- Wenn A aus einer Formelmenge α semantisch folgt, dann ist A auch aus α syntaktisch ableitbar
- Wenn A semantisch allgemeingültig ist, dann ist A auch syntaktisch beweisbar
 - ▶ Jede Tautologie ist ein Theorem.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg